経済統計学 - 宿題 No.2
（解答例）

蛭川雅之

2025 年 11 月 14 日

第 1 部

問題 1-1

　n 人の数学の試験の得点（素点）を $\{X_i\}_{i=1}^n$（単位：点）と表記する。素点で評価したこの試験の平均および標準偏差はそれぞれ

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$
$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

である。

(1)　まず、標準化後の得点を $\{Y_i\}_{i=1}^n$ と表記する。$Y_i = \left(X_i - \bar{X}\right)/\hat{\sigma}_X$ であることに注意すると、標準化後の得点の平均は

$$\begin{aligned}\bar{Y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\hat{\sigma}_X}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_X}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\hat{\sigma}_X}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \bar{X}\right) = 0\end{aligned}$$

であり、一方、標準偏差は

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_Y &= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\hat{\sigma}_X}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_X^2}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_X^2}} = 1
\end{aligned}
$$

となる。

(2)　次に、偏差値を $\{Z_i\}_{i=1}^{n}$ と表記する。偏差値の定義から $Z_i = 50 + 10Y_i$ が成り立ち、偏差値の平均は

$$
\begin{aligned}
\bar{Z} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(50+10Y_i) \\
&= 50 + 10\bar{Y} = 50
\end{aligned}
$$

であり、一方、標準偏差は

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_Z &= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i-\bar{Z}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(50+10Y_i)-50\}^2} \\
&= \sqrt{100\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)} \\
&= \sqrt{100\times 1} = 10
\end{aligned}
$$

となる。■

問題 1-2

楽曲 H の採点結果を X（単位：点）と表記する。

(1)　X の標本平均 $\bar{X}$ および標本分散 $\hat{\sigma}^2$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{1}{10}\left(78+86+93+83+88+76+91+89+81+85\right) = \frac{850}{10} = 85, \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{10}\Big\{(78-85)^2+(86-85)^2+(93-85)^2+(83-85)^2+(88-85)^2 \\
&\quad +(76-85)^2+(91-85)^2+(89-85)^2+(81-85)^2+(85-85)^2\Big\} \\
&= \frac{1}{10}\left(49+1+64+4+9+81+36+16+16+0\right) \\
&= \frac{276}{10} = 27.6
\end{aligned}$$

である。

(2)　この正規母集団の平均を μ とすると、$\bar{X} \sim N\left(\mu, 5.0^2/10\right)$ が成り立つ。$\bar{X}$ の実現値 $\bar{x} = 85$ を使うと、μ に関する 95% 信頼区間は

$$85 - 1.96\frac{5.0}{\sqrt{10}} \le \mu \le 85 + 1.96\frac{5.0}{\sqrt{10}} \Rightarrow 81.90 \le \mu \le 88.10$$

である。

(3)　分散が未知の場合は $\sqrt{10-1}\left(\bar{X}-\mu\right)/\hat{\sigma} \sim t\,(9)$ を利用する。ここで、$\hat{\sigma}^2 = 27.6$ および $\texttt{tinv}(0.05, 9) = 2.26216$ であるから、μ に関する 95% 信頼区間

$$85 - 2.26216\frac{\sqrt{27.6}}{\sqrt{9}} \le \mu \le 85 + 2.26216\frac{\sqrt{27.6}}{\sqrt{9}} \Rightarrow 81.04 \le \mu \le 88.96$$

が得られる。■

問題 1-3

添え字 1 が“10 年前”、添え字 2 が“今年”を表すものとすると、帰無仮説 H_0 および対立仮説 H_1 は

$$H_0 : p_1 = p_2,\ H_1 : p_1 > p_2 \Rightarrow H_0 : p_1 - p_2 = 0,\ H_1 : p_1 - p_2 > 0$$

である。ここで、10 年前および今年の喫煙をする男子大学生の標本比率はそれぞれ

$$\hat{p}_1 = \frac{1323}{4200} = 0.315$$
$$\hat{p}_2 = \frac{1197}{4200} = 0.285$$

であり、また、H_0 の下での母集団比率 p の一致推定量は

$$\hat{p} = \frac{1323+1197}{4200+4200} = \frac{2520}{8400} = 0.3$$

である。従って、検定統計量は

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.315-0.285}{\sqrt{0.3\,(1-0.3)\left(\frac{1}{4200}+\frac{1}{4200}\right)}} = 3.00$$

である。$N\,(0,1)$ の右側 1% 点（＝有意水準 1% の臨界値）は `normsinv`$(0.990) = 2.326348$ であり、$z = 3.00 > 2.326348$ が成り立ち、H_0 は有意水準 1% で棄却される。この結果は、この 10 年間で男子大学生の喫煙率が低下した強い証拠となる。■

第 2 部

※ Excel ファイル“`hw2_econstat_2025.xlsx`”も併せて確認すること。

問題 2-1

シート“`Q2-1`”を参照せよ。検定統計量 Q の自由度は $(5-1-1=)\,3$ であり、帰無仮説を有意水準 5% で棄却できないことがわかる。この検定結果は「データがポアソン分布に従っていない証拠は乏しい」と解釈される。■

問題 2-2

シート“`Q2-2`”を参照せよ。検定統計量 Q の自由度は $((3-1)\times(2-1)=)\,2$ であり、帰無仮説は有意水準 5% で棄却される。この検定結果は「視聴行動に地域差が見られる」と解釈される。また、クラメール連関係数は

$$V = \sqrt{\frac{Q}{n\,\{\min(k,\ell)-1\}}} = \sqrt{\frac{14.3970}{1200\times\{\min(3,2)-1\}}} = \sqrt{\frac{14.3970}{1200}} \approx 0.1095$$

である。■