経済統計学講義ノート No.9

回帰分析 I

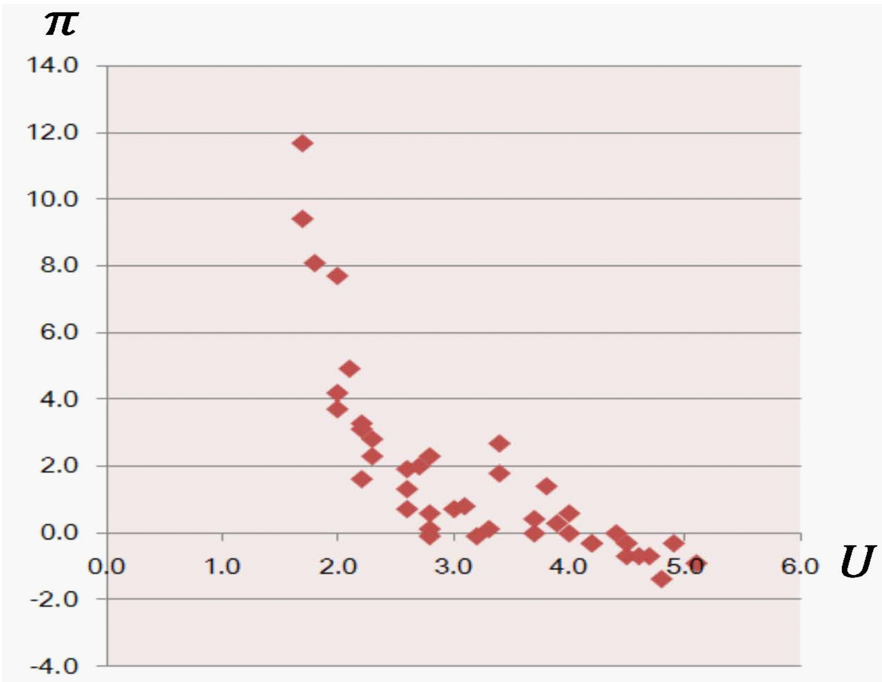
蛭川雅之

2023 年 11 月 7 日

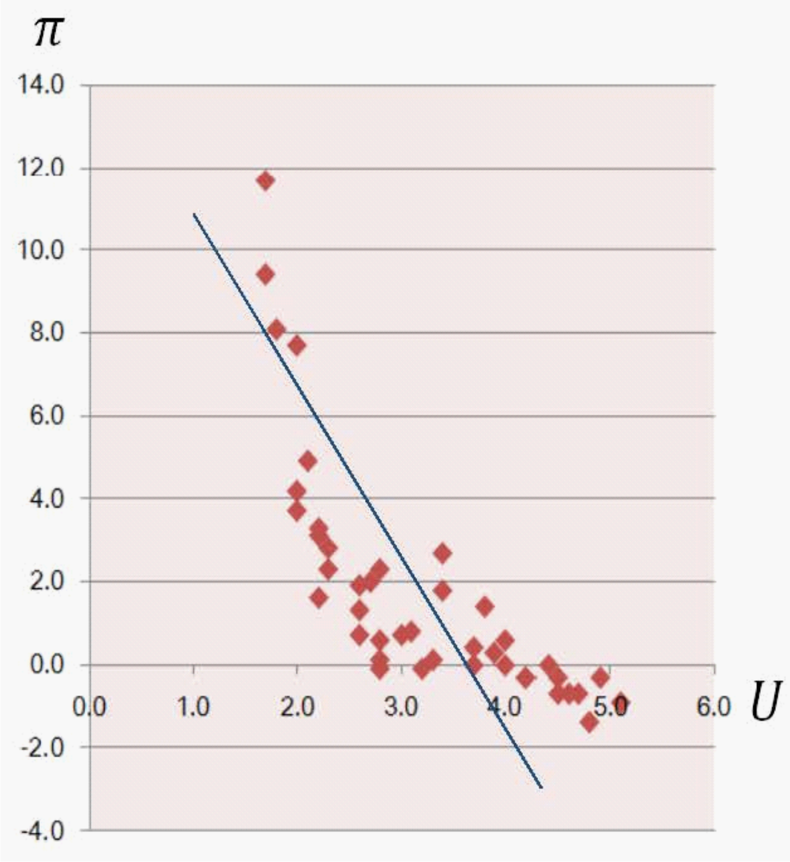
目　次

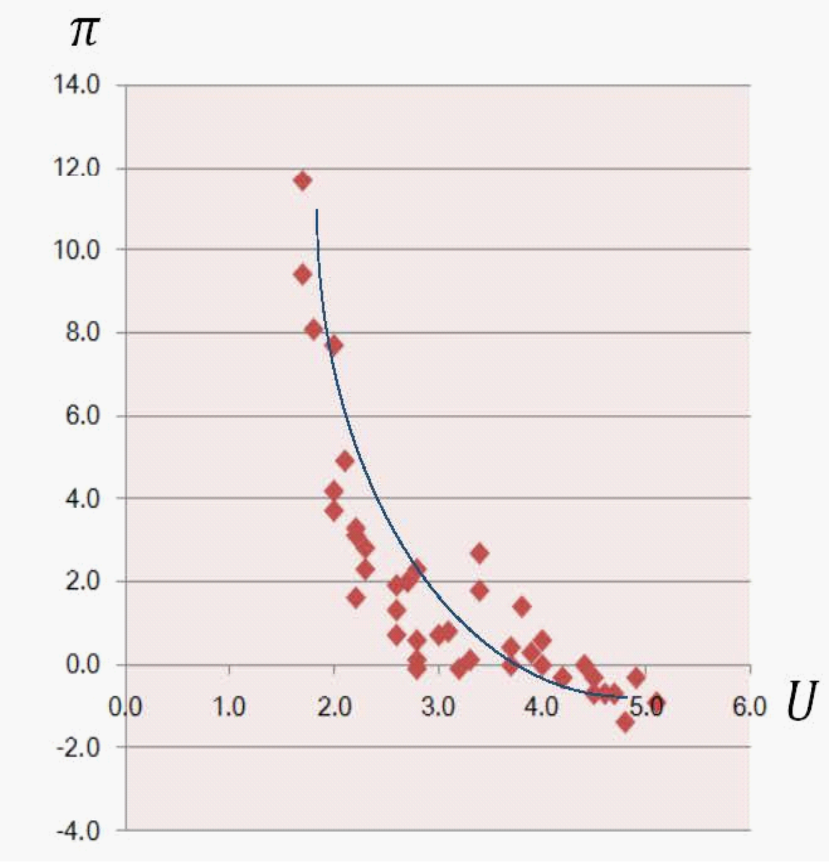
1　回帰分析の例：フィリップス曲線

- 次の散布図は我が国の 1975 年〜2016 年の年平均完全失業率 U を横軸、消費者物価指数対前年比 π（全国、2015 年基準）を縦軸にとって作成したものである。



■疑問１　インフレ率 π と失業率 U の関係は直線か、それとも曲線か？（⇒ 定式化）





■疑問２　π と U との間に直線の関係

$$\pi \approx \beta_0 + \beta_1 U \tag{1}$$

または曲線の関係

$$\pi \approx \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{U} \right) \tag{2}$$

が成り立つとして、データに対して直線または曲線をどのようにあてはめればよいか？（⇒ 推定）

- データから (β_0, β_1) をどのように '計算' すればよいか？

■疑問３　π と U との関係が (1) の場合は $\beta_1 < 0$、(2) の場合は $\beta_1 > 0$ が成り立つと予想されるが、これらの仮説はデータから支持されるか？(⇒ 検定)

2　単回帰モデル

- π と U との関係が直線、曲線いずれの場合であっても、

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon \tag{3}$$

と統一的に表現できる。
  - 直線の場合、$(Y, X) = (\pi, U)$ と考える。
  - 曲線の場合、$(Y, X) = (\pi, 1/U)$ と考える。
- (3) を単回帰モデルという。
  - Y は被説明変数（または従属変数）、一方、X は説明変数（または独立変数）とよばれる。
  - ϵ は誤差項とよばれる。
  - (β_0, β_1) はパラメータとよばれる未知の定数である。

■重回帰モデルへの拡張

- 実証分析では、説明変数が 1 つだけの単回帰モデル (3) ではなく、$k\,(\geq 2)$ 個の説明変数からなる重回帰モデルが広く用いられる。

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k + \epsilon$$

1. 貨幣需要関数（$k = 2$）の場合：
   - Y：実質マネーストック
   - X_1：実質 GDP
   - X_2：利子率
2. 資産効果を考慮した消費関数（$k = 3$）の場合：
   - Y：実質消費
   - X_1：実質 GDP（または実質可処分所得）
   - X_2：実質資産残高
   - X_3：利子率

■回帰モデルと条件付き期待値との関連

- 条件付き期待値 $E(Y|X)$ を使い、誤差項を $\epsilon = Y - E(Y|X)$ と定義する。
  - この式を
  $$Y = E(Y|X) + \epsilon$$
  と書き直す。
- 既出の通り、条件付き期待値 $E(Y|X)$ は X の実現値に依存する。
  - $E(Y|X)$ を X の関数と見て、$E(Y|X) = g(X)$ と表記する。
- 一般に、$g(X)$ は X の非線形関数である。
  - 単回帰モデル (3) は $g(X)$ に X の一次関数 $g(X) = \beta_0 + \beta_1 X$ という制約を課したものと解釈できる。
  - (X, Y) が 2 変量正規分布に従う場合、$E(Y|X) = g(X)$ は実際に X の一次関数となる。

3 最小2乗法

3.1 表記の追加

- 大きさ n の標本 $\{(Y_i, X_i)\}_{i=1}^{n} = \{(Y_1, X_1), \ldots, (Y_n, X_n)\}$ を使って、単回帰モデル $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$ のパラメータ (β_0, β_1) をどのように推定するか？
- $(Y_1, X_1), \ldots, (Y_n, X_n)$ のそれぞれについて

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \epsilon_1 \\
&\vdots \\
Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_n + \epsilon_n
\end{aligned}
$$

が成り立つと考える。

- 一般に、第 i 番目の観測値 (Y_i, X_i) を用いて、

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

  と表現する。
- パラメータ (β_0, β_1) が特定の値 (b_0, b_1) をとるとする。
  - X_i および (b_0, b_1) から予測値

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

    が計算できる。
  - 同様に残差（＝予測値の“はずれ具合”）

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

    も計算できる。

3.2 あてはまりの基準

- ある基準の下でデータとのあてはまりが最もよい (b_0, b_1) を (β_0, β_1) の推定値とすればよいのではないか？
  - 「はずれ具合が最小となるような (b_0, b_1) を (β_0, β_1) の推定値に選ぶ」と解釈してもよい。
- どのような基準が妥当か？

基準 1 残差の和

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = e_1 + \cdots + e_n.$$

基準 2 残差の絶対値和

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i| = |e_1| + \cdots + |e_n|.$$

基準 3 残差の 2 乗和

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e_1^2 + \cdots + e_n^2.$$

- 基準 1 および 2 には次のような問題点がある。
  - 残差の和は $(-\infty, \infty)$ のあらゆる値をとりうる。
  - 残差の絶対値和は 0 以上であるが、数学的に取り扱いが難しい。
- 基準 3 に関しては、残差 2 乗和が 0 以上であり、これを最小にする (b_0, b_1) を見つけるのも数学的に容易である。
  - 残差 2 乗和が (b_0, b_1) の関数であることを考慮し、以後 $SSR(b_0, b_1)$（"SSR" は "Sum of Squared Residuals" の略）と表記する。

定義 4 最小 2 乗法（Ordinary Least Squares；略称 OLS）とは、残差 2 乗和

$$SSR(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2$$

を最小にする (b_0, b_1) を求めることをいう。

結論 5 (β_0, β_1) の最小 2 乗推定量は

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

で与えられる。ただし、

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

はそれぞれ X および Y の標本平均である。

4　単回帰モデルの最小 2 乗推定量

- 偏微分を利用して

$$SSR(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2$$

  を最小にする (b_0, b_1) を求めてもよいが、ここでは原始的な方法（＝平方完成）を用いる。

- 次の特殊ケースを考える。
  1. 切片のみの回帰式
  2. 原点を通る回帰式

4.1　切片のみの回帰式

- まず回帰式

$$Y_i = \beta_0 + \epsilon_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

  のパラメータ β_0 を最小 2 乗推定する。

- 残差 2 乗和 $SSR\,(b_0) = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - b_0\right)^2$ を b_0 について平方完成すると、以下のようになる。

$$SSR\,(b_0) = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2n\bar{Y}b_0 + nb_0^2 = n\left(b_0 - \bar{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$$

- $SSR\,(b_0)$ は $b_0 = \bar{Y}$ のとき最小となるから、β_0 の最小 2 乗推定量は

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y}$$

  である。

4.2　原点を通る回帰式

- 次に回帰式

$$Y_i = \beta_1 X_i + \epsilon_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

  のパラメータ β_1 を最小 2 乗推定する。
- 残差 2 乗和 $SSR(b_1) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_1 X_i)^2$ を b_1 について平方完成すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} SSR(b_1) &= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) b_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) b_1^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\left(b_1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \end{aligned}$$

- 先程と同様の手順から、β_1 の最小 2 乗推定量は

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

である。

■特殊ケース　$X_i \equiv 1$ の場合、

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y}$$

となる。

- 最小 2 乗法は“平均の一般化”であることを確認せよ。

4.3　最小 2 乗推定量の導出

■STEP 1

- 単回帰モデル $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$ において、傾き β_1 をある値 b_1 に固定する。
- 右辺の $\beta_1 X_i = b_1 X_i$ を左辺に移項し、$\tilde{Y}_i = Y_i - b_1 X_i$ と書き改めることにより、'切片のみの回帰式'

$$\tilde{Y}_i = \beta_0 + \epsilon_i \ (i = 1, \ldots, n)$$

  が得られる。
- この場合の β_0 の最小 2 乗推定量は次の通りである。

$$\tilde{\beta}_0 \left(= \tilde{\beta}_0 (b_1) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_i = \bar{Y} - b_1 \bar{X}$$

■STEP 2

- 残差 2 乗和 $SSR(b_0, b_1)$ に $b_0 = \tilde{\beta}_0$ を代入し、$(Y_i^*, X_i^*) = \left(Y_i - \bar{Y}, X_i - \bar{X}\right)$ と書き改めることにより以下の結果を得る。

$$
\begin{aligned}
& SSR\left(\tilde{\beta}_0, b_1\right) \\
& = \sum_{i=1}^{n} \left\{Y_i - \left(\bar{Y} - b_1 \bar{X}\right) - b_1 X_i\right\}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{\left(Y_i - \bar{Y}\right) - b_1 \left(X_i - \bar{X}\right)\right\}^2 \\
& = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i^* - b_1 X_i^*\right)^2
\end{aligned}
$$

- 右辺は '原点を通る回帰式' に対する残差 2 乗和であるから、β_1 の最小 2 乗推定量は次の通りである。

$$
\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^* Y_i^*}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{*2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}
$$

■STEP 3

- $\tilde{\beta}_0$ に STEP 2 の結果を代入することにより、最終的に β_0 の最小 2 乗推定量は次のようになる。

$$\hat{\beta}_0 = \tilde{\beta}_0\left(\hat{\beta}_1\right) = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X}$$

■コメント

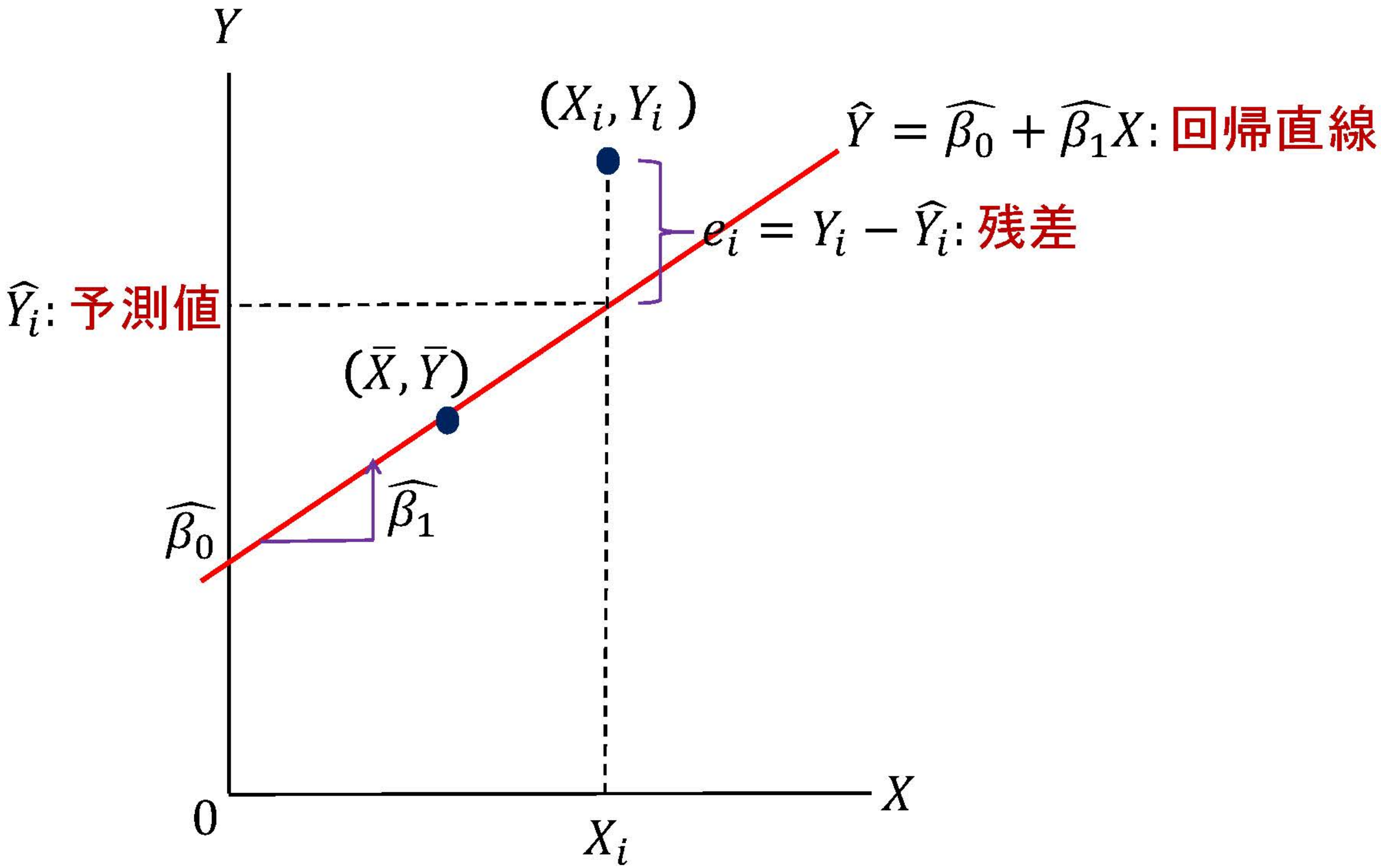
- 最小 2 乗推定量 $\hat{\beta}_1$ を書き改めると

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{(1/n)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \frac{\widehat{Cov}(X,Y)}{\widehat{Var}(X)}$$

となる。

  – $\hat{\beta}_1$ は $Cov(X,Y)/Var(X)$ を標本で置き換えたものと解釈できる。

5　回帰直線・予測値・残差



Y
(X_i, Y_i)
$\hat{Y} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1}X$: 回帰直線
$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$: 残差
$\hat{Y}_i$: 予測値
$(\bar{X}, \bar{Y})$
$\widehat{\beta_1}$
$\widehat{\beta_0}$
0
X_i
X

6　Excel を用いたフィリップス曲線の推定

6.1　直線：$\hat{\pi} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 U$

概要

回帰統計	
重相関 R	0.7591
重決定 R2	0.5762
補正 R2	0.5656
標準誤差	1.9067
観測数	42

分散分析表

	自由度	変動	分散	観測された分散比	有意 F
回帰	1	197.7144	197.7144	54.3857	0.0000
残差	40	145.4164	3.6354		
合計	41	343.1307			

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
切片	8.7788	0.9938	8.8338	0.0000	6.7703	10.7872	6.7703	10.7872
U	-2.1843	0.2962	-7.3747	0.0000	-2.7829	-1.5857	-2.7829	-1.5857

6.2 曲線：$\hat{\pi} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (1/U)$

概要

回帰統計	
重相関 R	0.8733
重決定 R2	0.7626
補正 R2	0.7567
標準誤差	1.4271
観測数	42

分散分析表

	自由度	変動	分散	観測された分散比	有意 F
回帰	1	261.6712	261.6712	128.4913	0.0000
残差	40	81.4595	2.0365		
合計	41	343.1307			

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
切片	-5.9384	0.7155	-8.2995	0.0000	-7.3845	-4.4923	-7.3845	-4.4923
1/U	22.3518	1.9719	11.3354	0.0000	18.3666	26.3371	18.3666	26.3371