経済統計学講義ノート No.14

代表的な経済データ I：国民経済計算体系

蛭川雅之

2025 年 11 月 15 日

目　次

1　国民経済計算体系の概要

- 国民経済計算体系 (System of National Accounts ; SNA) とは、一国経済の全体像を記述するため国連統計委員会が作成する国際基準である。
  - 一国全体のマクロの経済状況を生産、分配、支出、資本蓄積といったフロー面や資産、負債といったストック面から体系的に明らかにすることを目的とする。
- 我が国の SNA 統計は内閣府経済社会総合研究所が作成・公表している。

- 計算基準の変遷：
  - 1965 年〜　53SNA
  - 1978 年〜　68SNA
  - 2000 年〜　93SNA
  - 2016 年〜　08SNA
- 平成 23 年基準改定：
  1. 08SNA への対応
     - R&D の資本化
     - 特許使用料の取扱変更
     - 防衛装備品の資本化. . .
  2. 概念・定義変更、推計手法見直し

2　SNA の基本的考え方

2.1　付加価値と発生主義

- 付加価値 . . . SNA 統計が計測する社会全体の価値
  - 生産される製品の多くは複数の人が生産に関わっている（＝社会的分業)。
  - 生産に要した費用に一定額の価値を付加して販売する。
- 国内総生産（GDP） . . . 一国全体の付加価値合計
  - 最終生産物の金額合計でもある。
- どの時点で GDP を把握するか？
  - 契約が成立した時点で取引が成立すると考える（＝発生主義)。

2.2 市場を仲介しない取引の算入

- GDP の計算に家計の自己使用のためのサービスの生産（無償労働）は含まれない。
  - 家事労働（例：炊事、掃除、育児、介護...）の市場価格の測定は困難である。
  - 仮に家事労働を GDP に含めると、GDP の 22〜26% を占めると推計される。
    - GDP は景気変動に応じて増減しなくなる！
- 例外的に、市場を仲介しないで生産・消費される財・サービスも金額換算する場合がある。
  - 具体的にはどのような場合か？

2.2.1 政府・非営利団体による無償の財・サービスの生産

- 具体例：
  - 教育
  - 警察
  - 防衛. . .
- 根拠：
  - 政府サービス（公教育等）$\uparrow \Rightarrow$ GDP$\downarrow$?
- 産出額の推計：
  - 財・サービスの生産に要するコストで計測する。

2.2.2　帰属計算

1. 持家の家賃：
    - 理由：
        - 持家取得 $\uparrow$・借家住まいの家計 $\downarrow \Rightarrow$ GDP$\downarrow$?
    - 産出額の推計：
        - 同一の持家を賃貸した場合に支払うと見られる家賃で擬制して計測する。
2. 自己使用のための財の生産：
    - 具体例：
        - 農家の自家消費
        - 企業の知的財産生産物（研究開発投資）...
    - 産出額の推計：
        - 市場で販売した場合の価格で擬制して計測する。

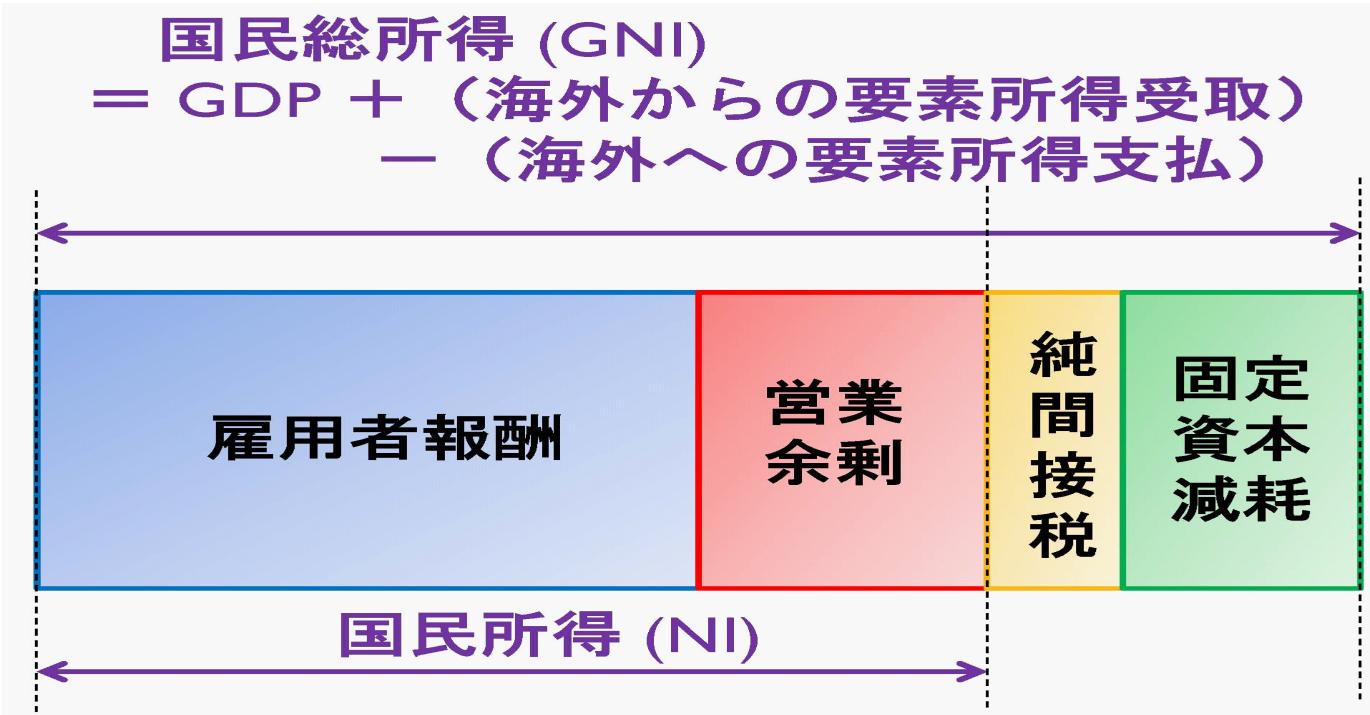
2.3 社会会計概念の導入

- SNA 統計では、企業会計の思想に準拠した社会会計という概念が導入されている。
- 制度部門：
  - 一国の経済活動を適切に分割したグループを指す。
  - 以下の 5 種類に分類される。
    1. 非金融法人企業
    2. 金融機関
    3. 一般政府（＝中央政府、地方政府、社会保障基金）
    4. 家計（個人企業を含む）
    5. 対家計民間非営利団体（＝社団法人、財団法人、医療法人、社会福祉法人、学校法人、宗教法人等に代表される NPO および NGO）

- 勘定：
  - 経済活動ごとに資金の調達・運用をまとめた統計表を指す。
  - SNA 統計は以下の 5 種類の統合勘定（＝各制度部門を統合した国民経済全体の基本表）から構成される。
    1. 国民所得勘定 ... 経済全体のフロー（生産・支出・分配）
    2. 産業連関表 ... 財・サービス別産業間の投入・産出構造
    3. 資金循環表 ... 部門間の資金の流れ
    4. 国民貸借対照表 ... 実物資産、金融資産・負債、正味資産（国富）などのストック
    5. 国際収支表 ... 海外との資金・財貨の取引

3　GDP 統計の実際

3.1　国民総所得 (GNI) と国民所得 (NI)



(注)　（純間接税）＝（間接税）－（補助金）

3.2 項目別需要

- （内需）＝（民間需要）＋（公的需要）
  1. 民間需要：
     - 民間最終消費支出
     - 民間住宅
     - 民間企業設備
     - 民間在庫変動
  2. 公的需要：
     - 政府最終消費支出
     - 公的固定資本形成
     - 公的在庫変動
- （外需）＝（財貨・サービスの輸出）－（財貨・サービスの輸入）

3.3　データの改訂時期

名　　称	発表時期・周期	推計データ
(1)1次速報値(1次QE)	当該四半期終了の6週間後	当該四半期の国民総支出系列と雇用者報酬
(2)2次速報値(2次QE)	1次速報の1月後	同上
(3)確報値	毎年12月頃	前年度と同四半期別のデータ
(4)確々報値	確報値公表の1年後	同上
(5)基準改訂値	5年に1度	同上

(注)　QE = Quarterly Estimates

3.4　推計方法

- QE と年次推計とで異なる推計方法を採用している。
- QE の推計式：

$$(\text{QE 推計値}) = \alpha \times (\text{需要側推計値}) + (1-\alpha) \times (\text{供給側推計値})$$

	需要側推計値	供給側推計値
家計消費支出	家計調査、家計消費状況調査	生産動態統計、サービス産業動向調査
民間設備投資	法人企業統計、個人企業経済統計	生産動態統計、建設総合統計、特定サービス動態統計

- 年次推計にはコモディティ・フロー法（国連の標準方式に基づく物的接近法）が利用される。
  - 財・サービスごとに総供給額を把握し、ここから中間需要を控除し最終需要を確定する。

3.5　名目値・実質値・デフレーター

- 名目値：
  - その年度に実際に取引されている価格で表した経済価値。
- 実質値：
  - 特定時点の物価を基準とした物価上昇や下落などの物価変動部分を名目値から取り除いた経済価値。
- デフレーター：
  - 名目値から実質値を計算するために考案された概念。

$$(\text{実質値}) = \frac{(\text{名目値})}{(\text{デフレーター})}$$

- 理論上、0 年を基準とする t 年の実質 GDP は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
(t\text{ 年の実質 GDP}) &= \sum_{i=1}^{n} p_{0i}q_{ti} \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_{ti}q_{ti} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{0i}q_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ti}q_{ti}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ti}q_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ti}q_{ti} / \sum_{i=1}^{n} p_{0i}q_{ti}} \\
&= \frac{(t\text{ 年の名目 GDP})}{(t\text{ 年の GDP デフレーター})}
\end{aligned}$$

  – GDP デフレーターはパーシェ型価格指数である。
- 実際には、価格・数量情報を積み上げて実質 GDP を計算するのは困難である。
  – どう計算しているのか？

3.5.1 支出面 GDP の実質化

- 需要の構成項目別に対応する物価指数で実質化する。

$$
\begin{aligned}
(\text{支出面名目 GDP}) &= C + I + G + X - M \\
(\text{支出面実質 GDP}) &= \frac{C}{P_C} + \frac{I}{P_I} + \frac{G}{P_G} + \frac{X}{P_X} - \frac{M}{P_M}
\end{aligned}
$$

- 支出面 GDP デフレーターを

$$
(\text{支出面 GDP デフレーター}) = \frac{(\text{支出面名目 GDP})}{(\text{支出面実質 GDP})}
$$

  と定義する。
  - このようなデフレーターをインプリシット・デフレーターという。

3.5.2 生産面 GDP の実質化

- 産業別付加価値に対応する物価指数は存在しない。
- 産業ごとに産出額と中間投入額を各々の物価指数で実質化し、

$$(\text{実質付加価値}) = (\text{実質産出額}) - (\text{実質中間投入額})$$

  を計算する。
  - 投入・産出双方で実質化する手法をダブルデフレーションという。
- 全産業の実質付加価値を合計して生産面実質 GDP を求める。
  - 生産面 GDP デフレーターは

$$(\text{生産面 GDP デフレーター}) = \frac{(\text{生産面名目 GDP})}{(\text{生産面実質 GDP})}$$

    と計算される。

4 経済データの分析

4.1 経済成長率

- 経済成長率とは、一般に実質 GDP の変化率を指す。
  - t 年の実質 GDP を Y_t とすると、前年を基準とする経済成長率は
$$\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}}$$
である。
- 変化率を計算する際には、計算期間が 1 年以上か 1 年未満かに注意する必要がある。

4.1.1 期間 1 年以上の場合

- 基準時 0 年から比較時 n 年までの年平均変化率を g とすると、Y_0 と Y_n との間に
$$Y_n = (1+g)^n Y_0$$
の関係が成り立つ。
- これを g について解くことにより、
$$g = \left(\frac{Y_n}{Y_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{Y_n}{Y_0}} - 1 \tag{1}$$
が得られる。

4.1.2 期間 1 年未満の場合

1. 四半期データを使用する場合：
    - 期間 3 カ月（$n = 3/12 = 1/4$）を (1) に代入し、年平均変化率

$$g = \left(\frac{Y_{1/4}}{Y_0}\right)^4 - 1$$

を得る。

2. 月次データを使用する場合：
    - 期間 1 カ月（$n = 1/12$）を (1) に代入し、年平均変化率

$$g = \left(\frac{Y_{1/12}}{Y_0}\right)^{12} - 1$$

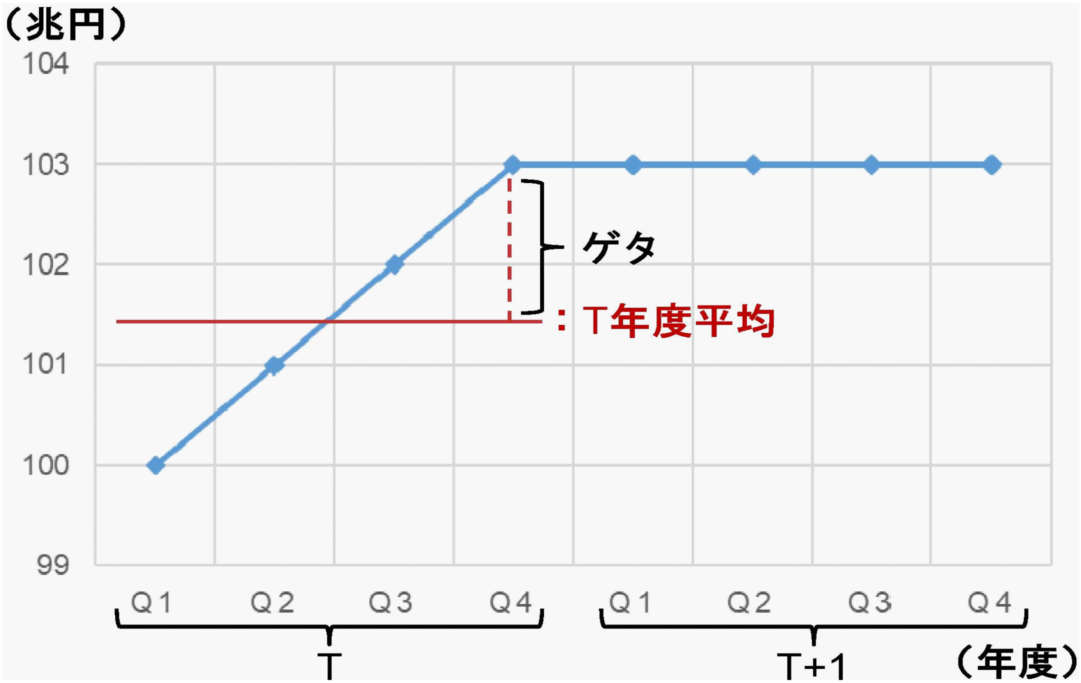
を得る。

- 1 年未満の変化率を年率に換算したものは瞬間風速と呼ばれる。

4.2 ゲタ

- 四半期データを使用して経済成長率を分析する場合、ゲタに注意が必要である。
  - ゲタとは実質 GDP の見かけ上の成長部分である。
- 数値例：
  1. T 年度の四半期別実質 GDP は $100, 101, 102, 103$ 兆円であった。
     - T 年度実質 GDP は $100 + 101 + 102 + 103 = 406$ 兆円である。
  2. 翌 $(T+1)$ 年度中の各四半期実質 GDP は前年度第 4 四半期実質 GDP の水準で横這いだった。
     - $(T+1)$ 年度実質 GDP は $4 \times 103 = 412$ 兆円である。
     - 前年度比 1.5% $(= 412/406 - 1)$ 成長!?

- ゲタは前年度の四半期実質 GDP 平均値を利用して経済成長率を計算するために発生する。
  - ゲタは
$$\frac{(\text{当該年度の第 4 四半期の数値})}{(\text{当該年度の四半期平均値})}-1$$
    で求められる。



4.3 寄与度

- 寄与度分析では、経済成長率全体に対し GDP の各構成項目がどの程度影響を与えたかを見る。
- t 年の実質 GDP が $Y_t = C_t + I_t + G_t + X_t - M_t$ と分解できることを利用して、経済成長率 g を各項目の変動率の加重平均で表す。

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{\Delta Y_t}{Y_{t-1}} \\
&= \frac{\Delta C_t}{Y_{t-1}} + \frac{\Delta I_t}{Y_{t-1}} + \frac{\Delta G_t}{Y_{t-1}} + \frac{\Delta\left(X_t - M_t\right)}{Y_{t-1}} \\
&= \underbrace{\frac{C_{t-1}}{Y_{t-1}}}_{\text{ウェイト}} \underbrace{\frac{\Delta C_t}{C_{t-1}}}_{\text{変動率}} + \frac{I_{t-1}}{Y_{t-1}} \frac{\Delta I_t}{I_{t-1}} + \frac{G_{t-1}}{Y_{t-1}} \frac{\Delta G_t}{G_{t-1}} + \frac{X_{t-1} - M_{t-1}}{Y_{t-1}} \frac{\Delta\left(X_t - M_t\right)}{X_{t-1} - M_{t-1}}
\end{aligned}
$$

5 産業連関表

5.1 産業連関表とは

- 産業連関表（投入産出表）は、産業（生産物あるいは商品）間の投入・産出を行列表示したものである。
  - 全ての財・サービスの生産から処分に至る過程を把握できる。
  - 経済波及効果分析等に利用される。
- 1936（昭和 11）年、米国の経済学者ワシリー・レオンチェフ（Wassily Leontief）によって初めて作成された。
  - 68SNA から国民経済計算体系に導入された。

5.2　数値例（閉鎖経済）

需要部門（買い手）／供給部門（売り手）		中間需要			最終需要			生産額
		産業A	産業B	計	民間消費支出	総固定資本形成	計	
中間投入	産業A	10	40	50	40	10	50	100
	産業B	30	80	110	50	40	90	200
	計	40	120	160	90	50	140	300
粗付加価値	雇用者報酬	25	40	65				
	営業余剰	20	10	30				
	固定資本減耗	10	20	30				
	純間接税	5	10	15				
	計	60	80	140				
生産額		100	200	300				

5.2.1 行（横）方向の読み方

- 産業 A を農業、産業 B を工業とする。
- 農業の生産額は 100 である。
  - 生産額は中間需要と最終需要に振り分けられる。
- 中間需要：
  - 各産業に原材料等として販売された額。
  - 農業の中間需要 50 の内訳は、農業に販売された 10、工業に販売された 40 である。
- 最終需要：
  - 民間消費支出（家計による消費）と総固定資本形成（企業による投資）の合計。
  - 農業の最終需要 50 の内訳は、民間消費支出 40、総固定資本形成 10 である。

5.2.2 列（縦）方向の読み方

- 中間投入と粗付加価値：
  - 農業は 100 の生産を行うため、原材料（中間投入）を農業から 10、工業から 30 購入した。
  - 農業の粗付加価値は、生産額 100 から中間投入合計 40 を差し引いた 60 である。
- 農業の粗付加価値 60 の分配：
  - 雇用者報酬に 25。
  - 純間接税に 5。
  - 固定資本減耗（資本減耗引当）に 10。
  - 営業余剰に残額 20。

5.2.3　GDP 三面等価の原則

1. 生産面 GDP：

$$
\begin{aligned}
&(\text{産業 A の付加価値}) + (\text{産業 B の付加価値}) \\
&= 60 + 80 = 140
\end{aligned}
$$

2. 分配面 GDP：

$$
\begin{aligned}
&(\text{雇用者報酬}) + (\text{営業余剰}) + (\text{固定資本減耗}) + (\text{純間接税}) \\
&= 65 + 30 + 30 + 15 = 140
\end{aligned}
$$

3. 支出面 GDP：

$$
\begin{aligned}
&(\text{民間消費支出}) + (\text{総固定資本形成}) \\
&= 90 + 50 = 140
\end{aligned}
$$

5.3 産業連関分析

5.3.1 投入係数

- 数値例を以下のように書き直す。

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">中間需要</td><td rowspan="2">最終需要</td><td rowspan="2">生産額</td></tr>
<tr><td>産業 A</td><td>産業 B</td></tr>
<tr><td rowspan="2">中間投入</td><td>産業 A</td><td>10
x_{11}</td><td>40
x_{12}</td><td>50
F_1</td><td>100
X_1</td></tr>
<tr><td>産業 B</td><td>30
x_{21}</td><td>80
x_{22}</td><td>90
F_2</td><td>200
X_2</td></tr>
<tr><td colspan="2">粗付加価値</td><td>60
V_1</td><td>80
V_2</td></tr>
<tr><td colspan="2">生産額</td><td>100
X_1</td><td>200
X_2</td></tr>
</table>

- この経済について、以下の関係が成り立つことがわかる。
  1. 需給均衡

$$\begin{aligned} \text{産業 A：} \quad & x_{11} + x_{12} + F_1 = X_1 \\ \text{産業 B：} \quad & x_{21} + x_{22} + F_2 = X_2 \end{aligned}$$

  2. 収支均衡

$$\begin{aligned} \text{産業 A：} \quad & x_{11} + x_{21} + V_1 = X_1 \\ \text{産業 B：} \quad & x_{12} + x_{22} + V_2 = X_2 \end{aligned}$$

- 投入係数は「1 単位生産するためにに何単位の中間投入が必要か」を表す。

$$\text{投入係数}\,(a_{ij}) = \frac{\text{中間投入}\,(x_{ij})}{\text{生産量}\,(X_j)}$$

  – この数値例では、

$a_{11} = x_{11}/X_1 = 10/100 = 0.1$	$a_{12} = x_{12}/X_2 = 40/200 = 0.2$
$a_{21} = x_{21}/X_1 = 30/100 = 0.3$	$a_{22} = x_{22}/X_2 = 80/200 = 0.4$

5.3.2 均衡産出高モデル

- 需給均衡式は投入係数 $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ を使って以下のように表現できる。

$$\begin{array}{ll}\text{産業 A：} & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + F_1 = X_1 \\ \text{産業 B：} & a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + F_2 = X_2\end{array}$$

- この連立 1 次方程式を解くことにより、最終需要 (F_1, F_2) を満たすのに必要な生産量 (X_1, X_2) がわかる。
  – 連立 1 次方程式を

$$\begin{array}{ll}\text{産業 A：} & (1-a_{11})\,X_1 - a_{12}X_2 = F_1 \\ \text{産業 B：} & -a_{21}X_1 + (1-a_{22})\,X_2 = F_2\end{array}$$

  と書き換え、(X_1, X_2) について解くと、次のような均衡産出高モデルが得られる。

$$X_1 = \frac{(1-a_{22})F_1 + a_{12}F_2}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$
$$X_2 = \frac{a_{21}F_1 + (1-a_{11})F_2}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}}$$

- 具体的に、投入係数 $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$ を右辺に代入すると、

$$X_1 = \frac{0.6F_1 + 0.2F_2}{0.48}$$
$$X_2 = \frac{0.3F_1 + 0.9F_2}{0.48}$$

  となる。

  – 最終需要 $(F_1, F_2) = (50, 90)$ のとき、生産量 $(X_1, X_2) = (100, 200)$ となることを確認せよ。

5.3.3 行列の演算

■行列とは. . .

- 幾つかの数を長方形上に配列したものを行列という。
  - 行列において、数の横の並びを行

$$\begin{bmatrix} \boxed{\text{第}\quad 1 \quad\text{行}} \\ \boxed{\text{第}\quad 2 \quad\text{行}} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

また、数の縦の並びを列

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\text{第}\\ 1\\ \text{列}\end{matrix}} \boxed{\begin{matrix}\text{第}\\ 2\\ \text{列}\end{matrix}} & \cdots \end{bmatrix}$$

という。

- n 行 m 列の行列を $n \times m$ 型行列とも表記する。
  - 特に、行数 n と列数 m が等しい行列を n 次の正方行列という。
- 行列は一般に大文字で表記し、その第 i 行と第 j 列の交差点にある数を (i,j) 成分または (i,j) 要素という。
  - 例えば、2 次の正方行列 A を以下のように表記する。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

■行列の相等

- 同じ型の（＝行数・列数が等しい）2 つの行列、例えば、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

について、対応する要素もそれぞれ等しい、即ち、全ての (i, j) に対して

$$a_{ij} = b_{ij}$$

が成り立つ場合、A と B は等しいといい、

$$A = B$$

と表記する。

■行列の和・差

- 同じ型の 2 つの行列、例えば、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

の和・差を

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix}$$

と定義する。

■行列の実数倍

- 実数 c に対し、行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

を c 倍したものを

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

と定義する。

■行列の積

- 行列 A と行列 B の積 AB は $(A$ の列数$) = (B$ の行数$)$ の場合にのみ定義される。
- AB の (i,j) 要素は A の第 i 行ベクトルと B の第 j 列ベクトルとの内積となる。

$$\overset{\text{行列 }A}{\begin{bmatrix} \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{im}} \end{bmatrix}} \overset{\text{行列 }B}{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{matrix}} \end{bmatrix}} = \overset{\text{行列 }AB}{\begin{bmatrix} \boxed{\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}} \end{bmatrix}}$$

- 行列の積に関して交換法則は一般に成り立たない。
  - 積 AB および BA がそれぞれ定義できる場合でも、一般に $AB \neq BA$ である。

■単位行列・零行列・零因子

- 任意の正方行列 A に対し、

$$AI = IA = A$$

が成り立つような正方行列 I を単位行列という。

– 単位行列は数の 1 に相当する。

– 単位行列の対角要素は 1、非対角要素は 0 である。

– 例：2 次の単位行列は

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

- 全ての要素が 0 の行列を零行列といい、O と表記する。
  - 零行列は数の 0 に相当する。
  - A と同じ型の零行列 O に対し、
    $$A \pm O = A$$
    である。
  - A が正方行列である場合、A と同じ型の零行列 O に対し、
    $$AO = OA = O$$
    である。
- $A \neq O$ かつ $B \neq O$ であるが $AB = O$ となる場合がある。
  - このような行列 A と行列 B を零因子という。
  - 「$AB = O \Rightarrow A = O$ または $B = O$」とは言えない点に注意せよ。

■逆行列

- 正方行列 A に対し、
$$AB = BA = I$$
を満たす正方行列 B が存在する場合、B を A の逆行列といい、A^{-1} と表記する。
  - 逆行列を持つ行列を正則（非特異、可逆）行列という。
- 正方行列 A が逆行列 A^{-1} を持つか否かは、行列式を計算することにより確認できる。

– 例：2 次の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

に対する行列式は

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

である。

1. $|A| \neq 0$ の場合は逆行列 A^{-1} が存在し、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

である。

2. $|A| = 0$ の場合は逆行列 A^{-1} が存在しない。

■連立 1 次方程式とクラメルの公式

- (x_1, x_2) を未知数とする連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

- ここで

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

と表記すると、この方程式は

$$Ax = b$$

となる。

- 逆行列 A^{-1} が存在する場合、これを両辺に左から掛けることにより、解

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

が得られる。

  – 具体的には、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

  である。

- ここで、行列 A の第 j 列ベクトルを b に置き換えて得られる行列

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

を考える。

  – このとき、連立 1 次方程式の解の各要素は行列式の比

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |A_1| \\ |A_2| \end{bmatrix}$$

で表現できることが知られている（クラメルの公式）。

5.3.4 レオンチェフ行列

- 話を需給均衡式

$$\begin{array}{ll} \text{産業 A：} & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + F_1 = X_1 \\ \text{産業 B：} & a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + F_2 = X_2 \end{array}$$

  に戻す。

- ここで

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

  と表記すると、この方程式は

$$AX + F = X \Rightarrow (I - A)X = F$$

  と書き換えられる。

– なお、

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix}$$

をレオンチェフ行列という。

- $|I - A| \neq 0$ の場合にレオンチェフ逆行列 $(I - A)^{-1}$ が存在し、連立１次方程式を直接解く場合と同様の均衡産出高モデル

$$\begin{aligned} X &= (I - A)^{-1} F \\ &= \frac{1}{|I - A|} \begin{bmatrix} 1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1 - a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} (1 - a_{22}) F_1 + a_{12}F_2 \\ a_{21}F_1 + (1 - a_{11}) F_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。

問題 1 クラメルの公式を用いてこの均衡産出高モデルを導出せよ。

5.3.5 波及効果分析

- レオンチェフ逆行列は、ある産業の最終需要が1単位増加する場合、直接・間接に各産業の生産額がどれだけ誘発されるかを示す生産誘発係数である。
  - 各産業の生産額は最終需要の1次式である。
  - 第 j 産業の最終需要が1単位増加する場合の第 i 産業の生産額の増分は $\partial X_i/\partial F_j$ で表される。
  - $\partial X_i/\partial F_j$ はレオンチェフ逆行列 $(I-A)^{-1}$ の (i,j) 要素である。

5.3.6 産業連関分析の限界

1. 投入係数の安定性?
   - 技術革新が著しい産業では投入係数の精度が落ちる。
2. 需要される財・サービスは全て生産可能?
   - 供給制約は考慮されていない。
3. 在庫の影響?
   - 在庫が十分にある場合、需要増に伴う波及効果は中断する。
4. 生産誘発までの時間?
   - いつ、どの産業に、どれ位の規模で生産が誘発されるかまでは予測できない。

問題 2 ある経済の産業連関表は以下のようであるとする。産業 B の最終需要のみが 10 単位増加する場合、産業 A・B の生産額はそれぞれどれほど増加するか。(i) 行列の積を直接計算する方法、(ii) クラメルの公式を用いる方法の 2 通りで計算し、結果を比較せよ。【ヒント：Excel 上で逆行列を求める場合、(i) 結果を出す範囲を予め指定した後、(ii) 関数 `minverse` を`ctrl`+`shift`+`enter`を同時に押して実行する。また、行列の積を求める場合も、やはり (i) 結果を出す範囲を予め指定した後、(ii) 関数 `mmult` を`ctrl`+`shift`+`enter`を同時に押して実行する。さらに、行列式を求める場合は、関数 `mdeterm` を`enter`のみ押して実行する。】

		中間需要		最終需要	生産額
		産業 A	産業 B		
中間投入	産業 A	20	70	10	100
	産業 B	20	20	60	100
粗付加価値		60	10		
生産額		100	100		