宿題 No.2 - 解答例

2025 年 5 月 8 日

※正答は赤字、解説は青字で印字してあります。

問 1 ～ 問 5

ある大学の統計学の講義で100点満点の中間試験を実施したところ、平均40点、標準偏差10点であった。各学生の本来の得点（「素点」という）は整数値である。平均点が想定を大きく下回り合格者が少数になりそうな点を危惧した担当教員は、次の(a)(b)のいずれかの方法で得点調整を行うことを検討している。

(a) 各学生の素点に一律10点を加えたものを得点とする。

(b) 各学生の素点を20%増加させたものを得点とする。この場合、調整後の得点が小数値をとることを認める。例えば、素点が43点である場合、8.6点を加えて51.6点を得点とする。

このとき、次のそれぞれの説明が正しければ①、誤っていれば②、与えられた情報だけで判断できなければ③を選べ。

問1：(a)に比べて(b)の方が調整後の得点の平均は大きくなる。②

(a)の平均は40＋10 = 50点、一方、(b)の平均は40×1.2 = 48点である。

問2：(a)に比べて(b)の方が調整後の得点の標準偏差は大きくなる。①

(a)の標準偏差は10点のまま、一方、(b)の標準偏差は10×1.2 = 12点である。

問3：(a)に比べて(b)の方が調整後の得点が60点以上の学生の割合は大きくなる。②

(a)による得点が60点以上の素点は60－10 = 50点以上、一方、(b)による得点が60点以上の素点も60÷1.2 = 50点以上である。

問4：(a)に比べて(b)の方が調整後の得点と素点との相関係数は大きくなる。②

(a)(b)いずれを採用しても、各学生の得点は正の傾きを持つ素点の一次関数で表されるため、相関係数はともに1である。

問5：(a)に比べて(b)の方が各学生の偏差値は高くなる。なお、偏差値を求める公式は$50+10\times($調整後の得点を標準化した数値$)$である。②

(a)(b)いずれを採用しても各学生の標準化後の得点は同一であり、偏差値に差は生じない。

問 6 ～ 問 8

ある中学校3年生の1学期と2学期の英語の期末試験の得点をそれぞれ(X, Y)と表記する。この中学校には両方の試験を受験した生徒がn名おり、英語担当教員はn名分のデータ$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$を使って相関係数$r_{XY}$を計算した。このとき、次のそれぞれの説明が正しければ① 、誤っていれば②、与えられた情報だけで判断できなければ③を選べ。

問6：r_{XY}の絶対値は1より大きい値をとる場合がある。②

講義で説明した通り、相関係数は-1以上1以下の値をとる。

問7：得点(X, Y)に対応する偏差値をそれぞれ(U, V)と表記する。このとき、$(U_1, V_1), \ldots, (U_n, V_n)$から計算される相関係数$r_{UV}$について、$r_{UV} > r_{XY}$が成り立つ。なお、$\left(\text{偏差値}\right) = 50 + 10 \times \left(\text{標準化した得点}\right)$であり、また、偏差値は各回の試験で個別に計算するものとする。②

1学期の英語の期末試験の平均点を$\bar{X}$、標準偏差を$\hat{\sigma}_X$と表記する。このとき、得点Xと偏差値Uとの間に

$$U = 50 + 10 \times \left(\frac{X - \bar{X}}{\hat{\sigma}_X}\right) = \left(\frac{10}{\hat{\sigma}_X}\right) X + \left(50 - 10 \frac{\bar{X}}{\hat{\sigma}_X}\right)$$

という関係が成り立つ。同様に、2学期の英語の期末試験の平均点を$\bar{Y}$、標準偏差を$\hat{\sigma}_Y$と表記すると、得点Yと偏差値Vの間に

$$V = 50 + 10 \times \left(\frac{Y - \bar{Y}}{\hat{\sigma}_Y}\right) = \left(\frac{10}{\hat{\sigma}_Y}\right) Y + \left(50 - 10 \frac{\bar{Y}}{\hat{\sigma}_Y}\right)$$

という関係も成り立つ。ここで、$U(V)$は$X(Y)$の一次関数であり、かつ、その傾き$10/\hat{\sigma}_X (10/\hat{\sigma}_Y)$が正であることから、$r_{UV} = r_{XY}$が成り立つ。

問8：問7と同様、得点Xおよびこれに対応する偏差値Uについて考える。このとき、$(X_1, U_1), \ldots, (X_n, U_n)$から計算される相関係数$r_{XU}$について、$r_{XU} \geq r_{XY}$が成り立つ。①

$(X_1, U_1), \ldots, (X_n, U_n)$は正の傾きを持つ同一の直線上に並んでいることから$r_{XU} = 1$であり、相関係数の上限も考慮すると、$r_{XU} = 1 \geq r_{XY}$となる。

問9 ～ 問14

以下の空欄に該当する数値を選べ。もし正答が見つからない場合は、正答に最も近い数値を選択せよ。

統計学者H氏は昨年7月1カ月間の平均気温Xと1人当たりアイスクリーム消費量Yとの関係を米国50州それぞれの最大の都市で調査し、XとYの相関係数が0.7であることを確認した。なお、元データの計測単位はXが華氏(°F)、Yがガロンであり、H氏は日本の学生にもわかりやすいよう華氏を摂氏(°C)、ガロンをリッ

トルに換算した。なお、Xと摂氏に換算した平均気温Z、Yとリットルに換算した1人当たりアイスクリーム消費量Wとの間にはそれぞれ次のような関係がある。

$$X = \frac{9}{5}Z + 32$$
$$W = 3.785412Y$$

このとき、Xの分散はZの分散の（問9）倍、Yの平均はWの平均の（問10）倍、さらに、Yの標準偏差はWの標準偏差の（問11）倍である。また、ZとWの相関係数、ZとYの相関係数、ZとXの相関係数はそれぞれ（問12）、（問13）および（問14）である。

問9：① $\frac{25}{81}$　② $\frac{5}{9}$　③ $\frac{9}{5}$　④ $\frac{81}{25}$

XとZの関係式におけるZの傾きに着目し、Xの分散はZの分散の$\left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$倍になることがわかる。

問10：① $\frac{1}{(3.785412)^2}$　② $\frac{1}{3.785412}$　③ 3.785412　④ $(3.785412)^2$

問11：① $\frac{1}{(3.785412)^2}$　② $\frac{1}{3.785412}$　③ 3.785412　④ $(3.785412)^2$

$Y = \frac{1}{3.785412}W$から、Yの平均（標準偏差）はWの平均（標準偏差）の$\frac{1}{3.785412}$倍になることがわかる。

問12：① -1.0　② -0.7　③ 0.7　④ 1.0

問13：① -1.0　② -0.7　③ 0.7　④ 1.0

ZとWはそれぞれXとYを正の定数倍をした後に定数を加えたものであるから、ZとYの相関係数およびZとXの相関係数は、XとYの相関係数と同じ値である。

問14：① -1.0　② -0.7　③ 0.7　④ 1.0

Xは正の傾きを持つZの一次関数で表されるため、これらの相関係数は 1 になる。