宿題 No.3 - 解答例

2024 年 5 月 16 日

※正答は赤字、解説は青字で印字してあります。

問1 ～ 問4

以下の空欄に該当する数値を選べ。もし正答が見つからない場合は、正答に最も近い数値を選択せよ。

ワールドシリーズ（＝メジャーリーグベースボール（MLB）の優勝決定戦）では、出場する2球団（A, Nとする）のうち先に4勝したチームが優勝となる。シリーズ中の1試合でAがNに勝つ確率が1/2であり、この確率はシリーズを通して一定、かつ、各試合の勝敗は互いに独立であると仮定する。このとき、ワールドシリーズがちょうど第4戦、第5戦、第6戦、第7戦で終了する確率はそれぞれ（ 問1 ）、（ 問2 ）、（ 問3 ）、（ 問4 ）である。

問1：① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{5}{16}$

$$Pr\left(\text{Aが4連勝する}\right)+Pr\left(\text{Aが4連敗する}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(1-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

問2：① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{5}{16}$

$$\begin{aligned}&Pr\left(\text{Aが第4戦までに3勝し、第5戦に勝つ}\right)\\&+Pr\left(\text{Aが第4戦までに3敗し、第5戦に負ける}\right)\\&={}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}+{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

問3：① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{5}{16}$

$$\begin{aligned}&Pr\left(\text{Aが第5戦までに3勝し、第6戦に勝つ}\right)\\&+Pr\left(\text{Aが第5戦までに3敗し、第6戦に負ける}\right)\\&={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

問4：① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{5}{16}$

$$Pr\left(\text{Aが第6戦終了時点で3勝3敗である}\right)={}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

問 5 〜 問 6

以下の空欄に該当する数値を選べ。もし正答が見つからない場合は、正答に最も近い数値を選択せよ。

白玉8個、赤玉4個が入っている袋から球を1個取り出し、色を調べてからもとにもどす。この試行を6回続けて行うとき、白玉が少なくとも2回出る確率は（ **問5** ）、また、6回目に2度目の白玉が出る確率は（ **問6** ）である。

1回の試行で白玉が出る確率は$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$である。

問5：① $\frac{13}{729}$　② $\frac{73}{729}$　③ $\frac{656}{729}$　④ $\frac{716}{729}$

$$
\begin{aligned}
Pr\left(\text{白玉が少なくとも2回出る}\right) &= 1-Pr\left(\text{白玉が出るのは1回以下}\right)\\
&= 1-\left\{Pr\left(\text{白玉が1回も出ない}\right)+Pr\left(\text{白玉が1回出る}\right)\right\}\\
&= 1-\left\{{}_6C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(1-\frac{2}{3}\right)^6+{}_6C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^5\right\}=1-\frac{13}{729}=\frac{716}{729}
\end{aligned}
$$

問6：① $\frac{20}{729}$　② $\frac{40}{729}$　③ $\frac{80}{729}$　④ $\frac{160}{729}$

$$
\begin{aligned}
&Pr\left(\text{5回目までに白玉が1回出て、6回目にも白玉が出る}\right)\\
&= {}_5C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{20}{729}
\end{aligned}
$$

問 7 〜 問 11

以下の空欄に該当する数値を選べ。もし正答が見つからない場合は、正答に最も近い数値を選択せよ。

R大学の学生X君はレポートを作成する際、800字に1か所の割合で誤字脱字をしてしまうという。X君にA4用紙2ページのレポートを作成する課題が出たとする。レポートはA4用紙1ページ当たり1000字書くものとして、レポート中に誤字脱字が皆無、1か所、2か所、3か所、4か所以上ある確率はそれぞれ（ **問7** ）、（ **問8** ）、（ **問9** ）、（ **問10** ）、（ **問11** ）である。なお、誤字脱字の個所数はポアソン分布に従うものと考えてよい。【ヒント：平均発生回数λのポアソン分布に従う確率変数Xが実現値xをとる確率は

$$Pr(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},x=0,1,2,\ldots$$

であり、また、$e\approx 2.71828$としてよい。】

誤字脱字の確率が$p=\frac{1}{800}$、レポートの文字数が$n=2000$であるから、誤字脱字の平均個所数は$\lambda=np=2000\times\frac{1}{800}=2.5$である。誤字脱字の個所数を$X$と表記すると、$X$が実現値$x$をとる確率は

$$Pr(X=x)=\frac{e^{-2.5}2.5^x}{x!}=\frac{1}{e^{2.5}}\times\frac{2.5^x}{x!}$$

である。なお、確率計算には以下の結果を用いる。

$$\frac{1}{e^{2.5}}\approx\frac{1}{2.71828^{2.5}}\approx 0.082085$$

問7：**① 0.08**　② 0.21　③ 0.24　④ 0.26

$$Pr(X=0)=\frac{1}{e^{2.5}}\times\frac{2.5^0}{0!}\approx 0.082085\times 1\approx 0.0821$$

問8：① 0.08　**② 0.21**　③ 0.24　④ 0.26

$$Pr(X=1)=\frac{1}{e^{2.5}}\times\frac{2.5^1}{1!}\approx 0.082085\times 2.5\approx 0.2052$$

問9：① 0.08　② 0.21　③ 0.24　**④ 0.26**

$$Pr(X=2)=\frac{1}{e^{2.5}}\times\frac{2.5^2}{2!}\approx 0.082085\times\frac{6.25}{2}\approx 0.2565$$

問10：① 0.08　**② 0.21**　③ 0.24　④ 0.26

$$Pr(X=3)=\frac{1}{e^{2.5}}\times\frac{2.5^3}{3!}\approx 0.082085\times\frac{15.625}{6}\approx 0.2138$$

問 11：① 0.08　② 0.21　**③ 0.24**　④ 0.26

$$Pr(X\geq 4)=1-Pr(X<4)=1-Pr(X\leq 3)$$
$$\approx 1-(0.0821+0.2052+0.2565+0.2138)=0.2424$$