

宿題 No.8 - 解答例

2026 年 7 月 14 日

※正答は赤字、解説は青字で印字してあります。

問1 ～ 問11

以下の空欄に該当する数値を選べ。もし正答が見つからない場合は、正答に最も近い数値を選択せよ。

総務省統計局『社会生活統計指標—都道府県の指標—2023』にある2021年47都道府県別1世帯当たり平均月額実収入（単位：千円）と同平均月額消費支出（単位：千円）のデータを用いて単回帰分析を行った。具体的には、実収入 X と消費支出 Y との間に単回帰モデル

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, 47$$

を当てはめ、これを最小2乗推定した。計算の途中で以下の数値も得られた。

$$\bar{X} = 604.4021, \bar{Y} = 281.0000,$$

$$\hat{\sigma}_{XY} = 918.6045, \hat{\sigma}_X^2 = 3078.2615,$$

$$ESS = 12883.9626, RSS = 12501.6574$$

- (1) 切片 β_0 の最小2乗推定値は $\hat{\beta}_0 =$ （問1）、一方、傾き β_1 の最小2乗推定値は $\hat{\beta}_1 =$ （問2）である。
- (2) 重相関係数は $R =$ （問3）、決定係数は $R^2 =$ （問4）、自由度修正済み決定係数は $\bar{R}^2 =$ （問5）である。また、 X と Y の相関係数は $r_{XY} =$ （問6）である。
- (3) 回帰式の標準誤差は $s =$ （問7）である。また、 $\hat{\beta}_0$ と $\hat{\beta}_1$ の標準誤差はそれぞれ $SE(\hat{\beta}_0) =$ （問8）、 $SE(\hat{\beta}_1) =$ （問9）である。
- (4) 帰無仮説 $H_0: \beta_1 = 0$ を対立仮説 $H_1: \beta_1 > 0$ に対し、有意水準1%で検定したい。検定統計量の値は $t_1 =$ （問10）であり、これと臨界値 $t_{0.01}(45) = 2.412$ とを比較して、帰無仮説は有意水準1%で（問11）という結論に至る。

問1：①-1743.75 ②-336.95 ③100.65 ④520.55

問2：①0.30 ②1.31 ③2.33 ④3.35

最小2乗推定量は以下のように計算される。

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\sigma}_{XY}}{\hat{\sigma}_X^2} = \frac{918.6045}{3078.2615} \approx 0.2984$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 281.0000 - 0.2984 \times 604.4021 \approx 100.6464$$

問3 : ①0.50 ②0.51 ③0.71 ④0.81

問4 : ①0.50 ②0.51 ③0.71 ④0.81

問5 : ①0.50 ②0.51 ③0.71 ④0.81

問6 : ①0.50 ②0.51 ③0.71 ④0.81

まず

$$TSS = ESS + RSS = 12883.9626 + 12501.6574 = 25385.6200$$

から、決定係数

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{12883.9626}{25385.6200} \approx 0.5075$$

が得られる。従って、重相関係数は

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.5075} \approx 0.7124$$

となる。また、 $\hat{\sigma}_{XY} > 0$ から、 X と Y の相関係数は重相関係数に等しく

$$r_{XY} = R \approx 0.7124$$

である。最後に、 $n = 47$ から、自由度修正済み決定係数は

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-2)}{TSS/(n-1)} = 1 - \frac{12501.6574/45}{25385.6200/46} \approx 0.4966$$

となる。この結果から $\bar{R}^2 \leq R^2$ となることも確認できる。

問7 : ①16.49 ②16.67 ③277.78 ④277.81

問8 : ①26.50 ②26.60 ③26.70 ④26.80

問9 : ①0.01 ②0.02 ③0.03 ④0.04

誤差分散の推定値は

$$s^2 = \frac{RSS}{n-2} = \frac{12501.6574}{45} \approx 277.8146$$

となり、回帰式の標準誤差は

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{277.8146} \approx 16.67$$

とわかる。さらに、講義ノートNo.10スライドNos.66-67の結果から最小2乗推定量の標準誤差は以下のように計算できる。

$$SE(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\frac{s^2}{n} \left(1 + \frac{\bar{X}^2}{\hat{\sigma}_X^2} \right)} = \sqrt{\frac{277.8146}{47} \left(1 + \frac{604.4021^2}{3078.2615} \right)} \approx 25.5965$$

$$SE(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{s^2}{n\hat{\sigma}_X^2}} = \sqrt{\frac{277.8146}{47 \times 3078.2615}} \approx 0.0438$$

問10：①4.81 ②5.81 ③6.81 ④7.81

問11：①棄却されず、実収入が多いほど消費支出も多いとまでは言い切れない
②棄却されず、実収入が多いほど消費支出も多いという証拠が得られた
③棄却され、実収入が多いほど消費支出も多いとまでは言い切れない
④棄却され、実収入が多いほど消費支出も多いという証拠が得られた

検定統計量の値は

$$t_1 = \frac{\hat{\beta}_1}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{0.2984}{0.0438} \approx 6.81$$

である。この値は自由度 $n - 2 = 45$ の t 分布の上側1%点2.412を上回るため、帰無仮説は有意水準1%で棄却される。この結果は、実収入が多いほど消費支出も多いという証拠が得られたと解釈される。