統計学ノートNo. 8
仮説検定 I

担当教員：蛭川雅之
研究室：紫英館3階345研究室
メール： hirukawa@econ.ryukoku.ac.jp
オフィスアワー：毎週金曜日3講時

１　仮説検定の考え方

仮説検定とは…

- **母集団に関して初めに仮定したことが正しいかどうかを標本に照らしあわせて客観的に判断する方法である。**
  - **推定と並んで推測統計の根幹をなす。**

帰無仮説

- 「初めに仮定したこと」を**帰無仮説**といい、記号H_0で表す。
  - 例：母集団の平均μはゼロである。

$$H_0: \mu = 0$$

対立仮説

- **帰無仮説の一部または全部の否定を対立仮説といい、記号H_1で表す。**
  - **例**1：**母集団の平均**μ**はゼロでない。**

$$H_1 : \mu \neq 0$$

  - **例**2：**母集団の平均**μ**は正である。**

$$H_1 : \mu > 0$$

  - **例**3：**母集団の平均**μ**は負である。**

$$H_1 : \mu < 0$$

仮説検定の手順

1. **帰無仮説H_0および対立仮説H_1を立てる。**
2. **帰無仮説H_0が正しいと仮定して検定統計量の確率分布を求める。**

仮説検定の手順（つづき）

3. **有意水準（例：5%, 1%）を設定し、この有意水準に基づいて2の確率分布に対する臨界値および棄却域を定める。**

- **棄却域は「帰無仮説H_0が正しいという前提では許容できない範囲」を指す。**
- **標本から計算した検定統計量の値が棄却域に入る場合、帰無仮説H_0を棄却し対立仮説H_1を採択する。**
  - 「滅多にないことが起こった」と解釈される。

仮説検定の手順：注意事項

- **帰無仮説H_0を棄却できない場合は、「H_0を棄却するに足りる事実（証拠）が見つからなかった」と解釈する。**
  - **「H_0は正しい」とは断言できない（これも可能性の一つではあるが…）。**

両側検定・片側検定

- **帰無仮説H_0: $\mu = 0$と対立仮説H_1の組がどのように設定されているかにより、棄却域は異なる。**
  - H_1: $\mu \neq 0$**の場合、棄却域は検定統計量の確率分布の両側にある。【両側検定】**
  - H_1: $\mu < 0$**の場合、棄却域は検定統計量の確率分布の左側にある。【片側検定】**
  - H_1: $\mu > 0$**の場合、棄却域は検定統計量の確率分布の右側にある。【片側検定】**

仮説検定に関する２種類の危険

- **仮説検定をする際には以下の２種類の危険を認識する必要がある。**

1. **第１種の過誤：本当は帰無仮説が正しいのに、帰無仮説を誤って棄却（＝対立仮説を採択）してしまう。**
2. **第２種の過誤：本当は帰無仮説が正しくないのに、帰無仮説が正しいと判断（＝対立仮説を棄却）してしまう。**

仮説検定に関する２種類の危険（つづき）

- **仮説検定の基本的な考え方は、**
  1. **第１種の過誤が起こる可能性をある小さい確率に固定した上で、**
  2. **第２種の過誤が起こる可能性を最小化する。**
- **「ある小さい確率」を有意水準という。**
  - **有意水準として、通常5%または1%をとる。**
  - **有意水準をゼロにすることはできない。**

２　正規母集団の平均に関する検定

検定の方針

- **帰無仮説を**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

（μ_0はある定数、例えばゼロ）とする。

- $N(\mu, \sigma^2)$**から大きさ**n**の標本**$X_1, X_2, \ldots, X_n$**を取り出す。**

検定の方針：母分散σ^2が既知

- **標本平均**$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$**を利用する。**

- $H_0: \mu = \mu_0$**の下で、検定統計量は**

$$z \left(= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

となる。

検定の方針：母分散σ^2が未知

- **標本平均$\bar{X}$および標本標準偏差$\hat{\sigma}$を計算する。**
- $H_0: \mu = \mu_0$**の下で、検定統計量は**

$$t\left(= \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)}{\hat{\sigma}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu_0)}{\hat{\sigma}} \sim t(n-1)$$

となる。

母分散が既知の場合：例題

ある製パン会社では、クリームパンの重量を平均185.0g、標準偏差1.2gで管理して製造している。本日生産した製品の中から25個を無作為に選び重量を測定したところ、標本平均は184.1gであった。本日のクリームパンの製造工程に異常があったといえるか、有意水準5%で（両側）検定せよ。なお、クリームパンの重量は正規分布に従うとみなして差し支えない。

母分散が既知の場合：例題（つづき）

- **問題文から次の内容を読み取ることができる。**

1. **クリームパンの重さは分散$\sigma^2 = 1.2^2$（既知）の正規分布に従う。**
2. **帰無仮説と対立仮説は**

$$H_0: \mu = 185.0, H_1: \mu \neq 185.0$$

である。

3. **大きさ$n = 25$の標本に関する標本平均は$\bar{X} = 184.1$である。**

母分散が既知の場合：例題（つづき）

- **検定統計量の値は以下のようになる。**

$$z = \frac{\sqrt{25}(184.1 - 185.0)}{1.2} = -3.75$$

- **一方、$N(0,1)$ の両側 5% 点は** $z_{0.025} = 1.96$ **である。**

- $z_{0.025} = 1.96 < 3.75 = |z|$ **であるから、有意水準** 5% **で** H_0 **は棄却される。**
  - **本日のクリームパンの製造工程に異常があったと考えられる。**

母分散が未知の場合：例題

あるテレビ局は、夜のニュース番組の視聴率を改善させることを目的としてキャスターを交代させた。新キャスターは「最低でも視聴率5%は堅い」と評判の人物である。下表は全国10大都市における新キャスター登場日の視聴率（単位：%）の表である。新キャスターは評判通りの成果を上げたといえるか、有意水準5%で検定せよ。なお、視聴率のデータは正規分布に従うとみなして差し支えない。

都　市	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
視聴率	4.5	5.8	6.3	4.6	6.1	4.9	5.7	4.9	5.2	5.9

母分散が未知の場合：例題（つづき）

- **問題文から次の内容を読み取ることができる。**

1. **ニュース番組の視聴率は分散σ^2（未知）の正規分布に従う。**
2. **帰無仮説と対立仮説は**

$$H_0: \mu = 5, H_1: \mu > 5$$

である。

3. **大きさ$n = 10$の標本に関する標本平均は$\bar{X} = 5.39$、標本分散は$\hat{\sigma}^2 = 0.3789$である。**

母分散が既知の場合：例題（つづき）

- **検定統計量の値は以下のようになる。**

$$t = \frac{\sqrt{9}(5.39 - 5)}{\sqrt{0.3789}} \approx 1.901$$

- **一方、自由度**9**の**t**分布の上側**5%**点は**$t_{0.05} = 1.833$**である。**
- $t_{0.05} = 1.833 < 1.901 = t$**であるから、有意水準**5%**で**$H_0$**は棄却される。**
  - **新キャスターは評判通りの成果を上げたといえる。**

3　母集団比率に関する検定

検定の方針

- **帰無仮説を**

$$H_0: p = p_0$$

（p_0は0と1の間のある定数）とする。

- **大きさnのベルヌーイ分布に従う標本$X_1, X_2, \ldots, X_n$を取り出す。**
  - **各標本の実現値は0（失敗）もしくは1（成功）のいずれかである。**

検定の方針（つづき）

- **標本比率$\hat{p}(=\bar{X})$を計算する。**

- **中心極限定理により、nが十分大きいとき、$H_0: p = p_0$の下で検定統計量**

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

は近似的に標準正規分布$N(0,1)$に従う。

母集団比率の検定：例題

ある企業は、主力商品Aの認知度が30%を超えることを目標に掲げている。先頃、3大都市圏の消費者1500名に街頭アンケートをとったところ、474名が商品Aを知っていると答えたという。この結果をもとに、この企業の目標は達成できたかどうか、有意水準5%で仮説検定せよ。

母集団比率の検定：例題（つづき）

- **問題文から次の内容を読み取ることができる。**

1. **各消費者が商品Aを知っているか否かはベルヌーイ分布に従う。**
2. **帰無仮説と対立仮説は**

$$H_0: p = 0.3, H_1: p > 0.3$$

である。

3. **大きさ$n = 1500$の標本に関する標本比率は$\hat{p} = \frac{474}{1500} = 0.316$である。**

母集団比率の検定：例題（つづき）

- **検定統計量の値は以下のようになる。**

$$z = \frac{\sqrt{1500}(0.316 - 0.3)}{\sqrt{0.3 \times (1 - 0.3)}} \approx 1.35$$

- **一方、**$N(0,1)$**の上側**5%**点は**$z_{0.05} = 1.65$**である。**

- $z = 1.35 < 1.65 = z_{0.05}$**であるから、有意水準**5%**で**$H_0$**は棄却されない。**
  - **商品**A**の認知度が**30%**を超えたとは言い難い。**

4　母集団比率の差に関する検定

どのような検定か？

- 今までは1標本に関する検定を扱ってきた。
- 今回は、2つのグループ間で母集団比率が等しいかどうかを検定する。
  - 典型的な2標本検定問題である。
  - 2つのグループの例：男女、既婚者・未婚者、東京・大阪在住者…

表記

- まず、2グループを添え字1,2で区別する。
- さらに、以下の表記を導入する。
  - p_i:グループ$i(=1,2)$の母集団比率
  - n_i:グループ$i(=1,2)$の標本の大きさ
  - $\hat{p}_i$:グループ$i(=1,2)$の標本比率
  - $\hat{p}$:2グループ全体の標本比率

検定の方針

- **帰無仮説を**

$$H_0: p_1 = p_2 \Rightarrow H_0: p_1 - p_2 = 0$$

とする。

- **各グループの標本比率** $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ **および** $H_0: p_1 = p_2 = p$ **の下での2グループ全体の標本比率**

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

を計算する。

検定の方針（つづき）

- 中心極限定理により、(n_1, n_2)が十分大きいとき、$H_0: p_1 - p_2 = 0$の下で検定統計量

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

は近似的に標準正規分布$N(0,1)$に従う。

母集団比率の差の検定：例題

ある大学病院の内科では「喫煙習慣の有無により不整脈症状に違いが生じるか」を明らかにするため、喫煙患者75人、非喫煙患者175人の不整脈症状の有無を調べた。その結果、喫煙患者のうち12%、非喫煙患者のうち8%に不整脈症状が見られたという。この結果をもとに、不整脈症状の割合は喫煙患者と非喫煙患者で異なるかどうか、有意水準5%で仮説検定せよ。

母集団比率の差の検定：例題（つづき）

- **問題文から次の内容を読み取ることができる。**

1. **不整脈症状の有無はベルヌーイ分布に従う。**
2. **帰無仮説と対立仮説は**

$$H_0: p_1 = p_2, H_1: p_1 \neq p_2$$

である。

母集団比率の差の検定：例題（つづき）

3. **標本比率は以下の通りである。**

- **喫煙患者の標本（$n_1 = 75$）における不整脈症状の割合は$\hat{p}_1 = 0.12$である。**
- **非喫煙患者の標本（$n_2 = 175$）における不整脈症状の割合は$\hat{p}_2 = 0.08$である。**
- $H_0: p_1 = p_2 = p$**の下での喫煙患者・非喫煙患者を通した不整脈症状の割合は**

$$\hat{p} = \frac{75 \times 0.12 + 175 \times 0.08}{75 + 175} = \frac{23}{250} = 0.092$$

である。

母集団比率の差の検定：例題（つづき）

- **検定統計量の値は以下のようになる。**

$$z = \frac{0.12 - 0.08}{\sqrt{0.092 \times (1 - 0.092) \times \left(\frac{1}{75} + \frac{1}{175}\right)}} \approx 1.00$$

- **一方、**$N(0,1)$**の両側**5%**点は**$z_{0.025} = 1.96$**である。**
- $z = 1.00 < 1.96 = z_{0.025}$**であるから、有意水準**5%**で**$H_0$**は棄却されない。**
  - **喫煙患者・非喫煙患者間で不整脈症状の割合に有意な差があるとは言い切れない。**